Практическое занятие №14.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Вычисление двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле.**

№	Задания
1	Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy$ b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$ c) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)dx$
2	Вычислить двойной интеграл a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x} x^2 y dy$ b) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^1 x(y+2)dx$ c) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} dy$
3	Вычислить $\iint\limits_D x dx dy,$ если область D - треугольник ограниченными линиями $y=x, \quad x=1, \quad y=0.$
4	Вычислить интеграл $\iint\limits_D x^2 y dx dy$, где область D: $y=x^2$, $y=0$, $x=1$
5	В двойном интеграле перейти к полярным координатам r и φ, полагая $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. a) $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)\ dy$ b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\ dy$
6	Перейдя к полярным координатам вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} \sqrt{x^2+y^2}\ dx dy$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи из Лекции №14 (ФИТ)

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_G (x-y)dxdy$, если область G ограничена линиями: $y = 0$, $y = x^2$, $x = 2$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy$, если область G ограничена линиями $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

Пример 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_\Delta (3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования G ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint\limits_G y\ln x dxdy$, если область интегрирования ограничена линиями $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

Пример 5. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$.

Пример 6. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\, dx\, dy$, где область D — круг $x^2+y^2 \leqslant 9$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Пример:

1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy$, рассматривая его как предел интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата $D = [0, 1] \times [0, 1]$ на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая при этом в качестве точек ξ_i правые вершины ячеек.

◀ Разбиение области интегрирования на ячейки производится прямыми $x = \frac{i}{n}$, $y = \frac{j}{n}$ $(i, j = \overline{1, n-1})$, а значение функции $f(x, y) = xy$, $(x, y) \in D$ в каждой правой вершине ячейки равно $\frac{ij}{n^2}$ $(i, j = \overline{1, n})$. Вполне очевидно, что $d(\Pi) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}. \blacktriangleright$$

Пример:

Вычислить повторный интеграл $I = \int\limits_0^7 dx \int\limits_0^{x^2} dy$.

◐ Сначала вычислим внутренний интеграл по формуле Ньютона–Лейбница. Его результат будет подынтегральной функцией для внешнего интеграла.

$$I = \int\limits_0^7 dx\left(y\Big|_0^{x^2}\right) = \int\limits_0^7 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^7 = \frac{343}{3}.$$ ●

Пример:

Вычислить повторный интеграл $I = \int\limits_1^3 dx \int\limits_x^{3x} \frac{y}{x}\,dy$

◐ Множитель $\frac{1}{x}$ (он не зависит от y, поэтому может считаться постоянным для внутреннего интеграла) можно вынести за знак интеграла, т. е. перенести во внешний интеграл:

$$I = \int\limits_1^3 \frac{dx}{x}\int\limits_x^{3x} y\,dy = \int\limits_1^3 \frac{dx}{x}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_x^{3x}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 \frac{dx}{x}\cdot 8x^2 = 4\int\limits_1^3 x\,dx = 4\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = 16.$$

Пример:

Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, где D – квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

◐ Данный двойной интеграл можно представить в виде повторного двумя способами:

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{или} \quad \int\limits_0^1 y\,dy\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Визуальное наблюдение показывает, что проще брать первый интеграл, так как его внутренний интеграл легко сводится к табличному. Таким образом, считаем первый интеграл:

$$I = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 \frac{1}{2}\frac{d(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \int\limits_0^1\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Big|_0^1\right) =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \right) dx = \left[\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln(x+\sqrt{2+x^2}) \right] \Big|_0^1 =$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln\sqrt{2} = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}. \quad \bullet$$

Пример:

1. Свести двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ к повторному двумя способами (по формуле (1) и по формуле (2)), если G — область, ограниченная кривыми $x=1$, $y=x^2$, $y=2x$ $(x \leqslant 1)$.

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy, \tag{1}$$

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{2}$$

Δ I способ. Область G изображена на рис. 36, *а*. При каждом значении x из отрезка $[0,1]$ переменная y изменяется от x^2 до $2x$, т. е. область G можно представить в виде $G = \{(x,y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant \leqslant y \leqslant 2x\}$. По формуле (1) получаем

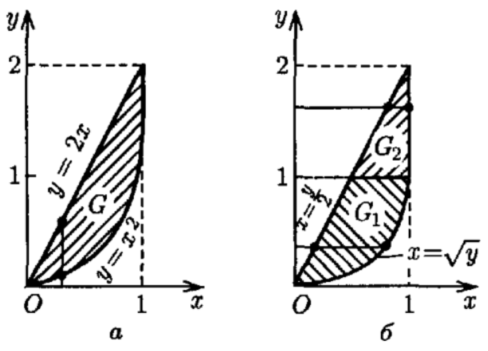


Рис. 36

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy.$$

II способ. Чтобы воспользоваться формулой (2), нужно разбить область G на две части, G_1 и G_2, как показано на рис. 36, *б*. В области G_1 переменная y изменяется от 0 до 1, а при каждом значении y переменная x изменяется от $y/2$ (значение x на прямой $y=2x$) до $\sqrt{y}$ (значение x на параболе $y=x^2$). Поэтому по формуле (2) получаем

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

В области G_2 переменная y изменяется от 1 до 2, а при каждом значении y переменная x изменяется от $y/2$ до 1. По формуле (2) имеем

$$\iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 dy \int_{y/2}^{1} f(x,y)\,dx.$$

Итак,

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^{1} f(x,y)\,dx. \ \blacktriangle$$

Пример:

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (x+y^2)\,dx\,dy$ по области G, ограниченной кривыми $y=x$ и $y=x^2$.

Δ Область G изображена на рис. 37. Сводим двойной интеграл к повторному по формуле (1):

$$\iint\limits_G (x+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x+y^2)\,dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл в повторном, пользуясь формулой Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_{x^2}^{x} (x+y^2)\,dy = \left(xy + \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{x^2}^{x} = x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^6.$$

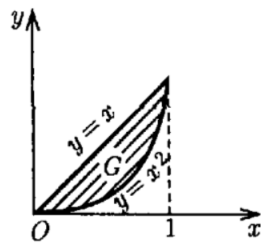


Рис. 37

Теперь вычисляем повторный интеграл:

$$\int\limits_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^6\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{21}x^7\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{42}. \blacktriangle$$

Пример:

3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy.$$

$\triangle$ Кривые $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=\sqrt{2x}$ и отрезок прямой $x=2$ ограничивают область G, изображенную на рис. 38, *а*. Данный повторный

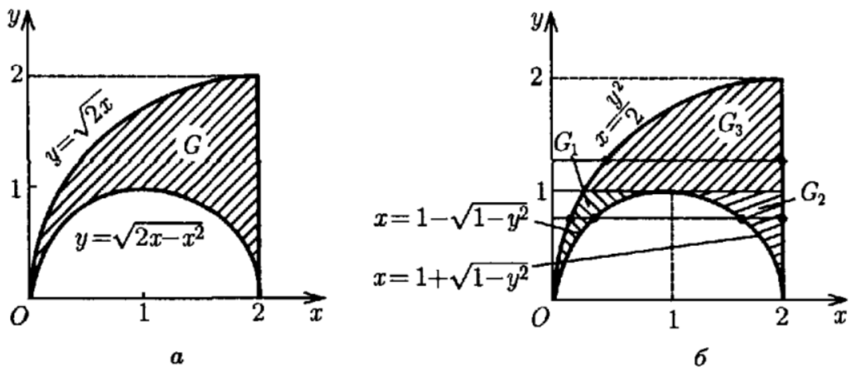


Рис. 38

интеграл равен двойному интегралу по этой области. Чтобы изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, нужно разбить область G на три части, как показано на рис. 38, *б*. Кривая $y=\sqrt{2x-x^2}$ является верхней полуокружностью окружности $(x-1)^2+y^2=1$. Разрешая это уравнение относительно x, получим два решения: $x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$. В областях G_1 и G_2 переменная y изменяется от 0 до 1, а при каждом значении y переменная x изменяется в области G_1 от $y^2/2$ (значение x на кривой $y=\sqrt{2x}$) до $1-\sqrt{1-y^2}$ (значение x на окружности), а в области G_2 — от $1+\sqrt{1-y^2}$ до 2. Поэтому по формуле (2) получаем

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx +$$

$$+ \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}} 2f(x,y)\,dx = \int\limits_0^1 dy \left[\int\limits_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx\right]$$

Аналогично для области G_3 имеем

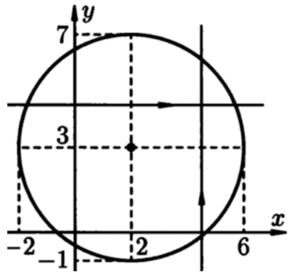
$$\iint\limits_{G_3} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y^2/2}^{2} f(x,y)\,dx.$$

Таким образом, окончательно находим

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy\left[\int\limits_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx\right] + \\ + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y^2/2}^{2} f(x,y)\,dx. \ \blacktriangle$$

Пример:

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле



$$\int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

❍ Учитывая пределы интегрирования, представим область D в виде системы неравенств

$$\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 6, \\ 3-\sqrt{12+4x-x^2} \leqslant y \leqslant 3+\sqrt{12+4x-x^2} \end{cases}$$

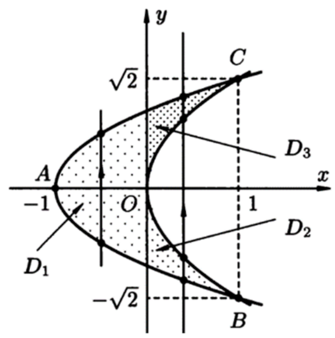
Графики функций $y_1 = 3-\sqrt{12+4x-x^2}$ и $y_2 = 3+\sqrt{12+4x-x^2}$ представляют собой соответственно нижнюю и верхнюю полуокружности окружности $(y-3)^2 = 12+4x-x^2$, или $(x-2)^2+(y-3)^2 = 16$. Таким образом, область интегрирования D — круг радиуса 4 с центром в точке $(2,3)$ (рис. 16). Зададим этот круг другой системой неравенств. Если спроектировать его на ось Oy, то получим отрезок $[-1,7]$, откуда имеем первое неравенство $-1 \leqslant y \leqslant 7$. Выразив далее x из уравнения окружности, получим соответственно уравнения левой и правой полуокружностей $x_1 = 2-\sqrt{16-(y-3)^2}$ и $x_2 = 2+\sqrt{16-(y-3)^2}$. Теперь область D можно записать так:

$$D: \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 7, \\ 2-\sqrt{16-(y-3)^2} \leqslant x \leqslant 2+\sqrt{16-(y-3)^2}. \end{cases}$$

Таким образом, после замены порядка интегрирования исходный повторный интеграл можно записать в виде

$$\int\limits_{-1}^{7} dy \int\limits_{2-\sqrt{16-(y-3)^2}}^{2+\sqrt{16-(y-3)^2}} f(x,y)\,dx. \qquad \bullet$$

Пример:



Изменить порядок интегрирования $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2/2} f(x,y)\,dx.$

❍ При разборе этого примера используем другой подход. Область интегрирования D задается системой неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}, \\ y^2-1 \leqslant x \leqslant \dfrac{y^2}{2}. \end{cases}$$

Геометрически это означает следующее: каждая горизонтальная прямая, проходящая через точки отрезка $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ оси Oy, пересекает сначала (при движении слева направо) параболу $x = y^2-1$ (назовем ее линией входа в D), а затем параболу $x = \dfrac{y^2}{2}$ (назовем ее линией выхода из D) —

При перемене порядка интегрирования нужно спроектировать область интегрирования D на другую ось (ось Ox) и обнаружить линии входа и выхода при движении снизу вверх вдоль вертикальных прямых.

Параболы $x = \dfrac{y^2}{2}$ и $x = y^2 - 1$ пересекаются в точках $B(1, -\sqrt{2})$ и $C(1, \sqrt{2})$ (действительно, приравнивая уравнения парабол, имеем $\dfrac{y^2}{2} = y^2 - 1 \Leftrightarrow y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$). Таким образом, проекция области D на ось Ox — отрезок $[-1, 1]$. Из рисунка видно, что на участке $x \in [-1, 0]$ точки входа и выхода расположены на ветвях одной параболы, а на участке $x \in [0, 1]$ — на ветвях разных парабол. Сначала определим ветви этих парабол, решая относительно y уравнения $x = y^2 - 1$ и $x = \dfrac{y^2}{2}$ на соответствующих участках. Получаем: $y = \pm\sqrt{x+1}$ и $y = \pm\sqrt{2x}$, $x \geqslant 0$. Первое равенство соответствует дугам AC (знак «плюс») и AB (знак «минус»), второе — дугам OC и OB (рис. 17). Тем самым, область D разбивается на три отдельные области D_1, D_2 и D_3, т. е. $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, где

$$D_1 : \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -\sqrt{x+1} \leqslant y \leqslant \sqrt{x+1}; \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\sqrt{x+1} \leqslant y \leqslant -\sqrt{2x}; \end{cases}$$

$$D_3 : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{2x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

Исходный интеграл напишем в виде двойного

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y)\, dx = \iint_D f(x, y)\, dx dy,$$

и применяя свойство аддитивности двойного интеграла, запишем ответ

$$\iint_D f(x, y)\, dx dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y)\, dy +$$

$$+ \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x, y)\, dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y)\, dy.$$

Пример:

4. В двойном интеграле $I = \iint\limits_G (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, где G — круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 2x$, перейти к полярным координатам с полюсом в точке $O(0, 0)$ и вычислить полученный интеграл.

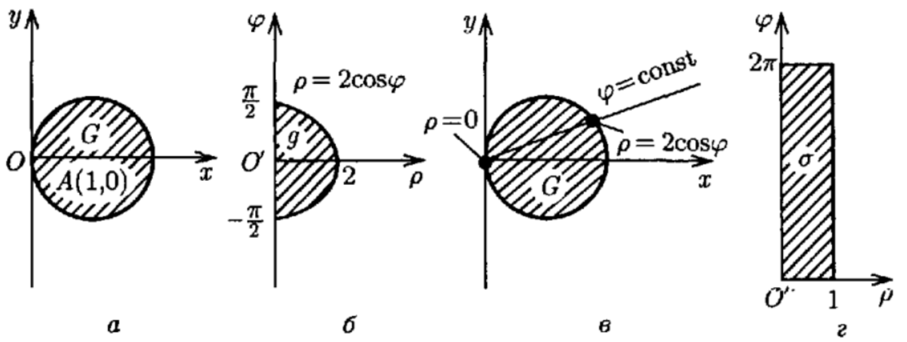


Рис. 39

△ Круг G изображен на рис. 39, *а*. Уравнения, связывающие (x, y) и полярные координаты (ρ, φ) с полюсом в точке $O(0,0)$, имеют вид

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \tag{10}$$

причем наглядно видно, что в качестве промежутка изменения φ можно взять сегмент $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Подставляя выражения (10) в уравнение окружности, получим $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$, откуда $\rho = 0$ или $\rho = 2\cos\varphi$. Эти две кривые на плоскости (ρ, φ) при $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ ограничивают область g (рис. 39, *б*), являющуюся прообразом области G при отображении (10). Якобиан $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}$ отображения (10) равен ρ. Отметим, что $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = 0$ на границе $\rho = 0$ области g, однако формула (4) замены переменных применима (см. замечание после теоремы 4). Подынтегральная функция $x^2 + y^2$ в новых переменных равна ρ^2. По формуле (4) имеем

$$I = \iint\limits_g \rho^3\,d\rho\,d\varphi.$$

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv. \tag{4}$$

Полученный двойной интеграл по области g сводим к повторному:

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^3\,d\rho, \tag{11}$$

и вычисляем повторный интеграл, применяя формулу Ньютона–Лейбница:

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = 4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3}{2}\pi. \ ▲$$

Пример:

5. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_G x^2y^2\,dx\,dy$, где $G = \{(x,y)\colon 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

△ Область G представляет собой кольцо (рис. 40, *а*). Его можно разбить на трапециевидные части, к которым применима формула сведения двойного интеграла к повторному, например так, как пока-

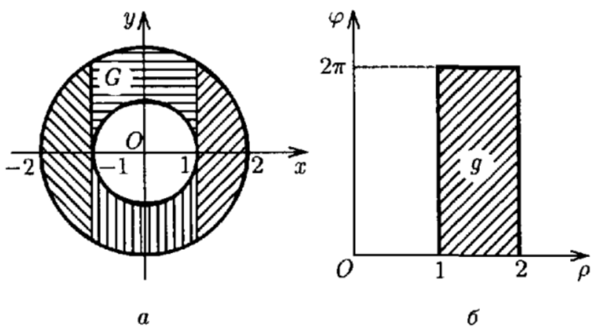


Рис. 40

зано на рис. 40, a. Однако удобнее сделать замену переменных — перейти к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. При этом отображении прообразом кольца является прямоугольник $g = \{(\rho,\varphi)\colon 1 \leqslant \rho \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ (рис. 40, $б$). Применяя формулу (4) и сводя двойной интеграл к повторному, получаем

$$I = \int\limits_1^2 d\rho \int\limits_0^{2\pi} \rho^5 \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \int\limits_1^2 \rho^5 d\rho \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\varphi}{4}\, d\varphi = \frac{63}{6}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{21\pi}{8}. \ \blacktriangle$$

Пример:

Вычислить двойной интеграл

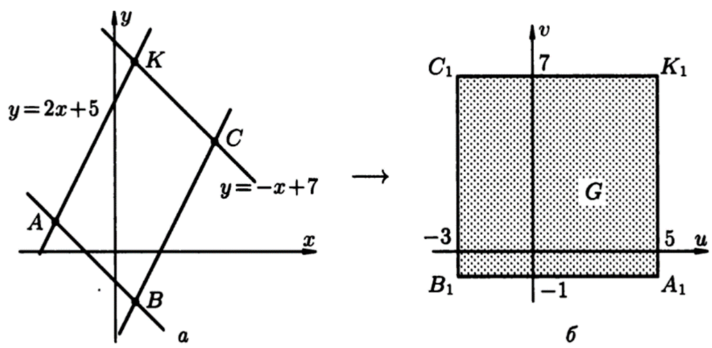
$$\iint\limits_D (2x+y)\,dxdy$$

по области D, ограниченной прямыми $y = 2x-3$, $y = 2x+5$, $y = -x+7$, $y = -x-1$.

◐ Область D — параллелограмм $ABCK$ (рис. 19 a). Хотя подынтегральная функция и область интегрирования просты, вычисление данного интеграла в прямоугольных координатах достаточно громоздко (убедитесь самостоятельно). Заметив, что уравнения прямых можно записать в виде $y-2x=-3$, $y-2x=5$, $y+x=7$ и $y+x=-1$, перейдем к новым координатам, для чего обозначим

$$\begin{cases} u = y-2x, \\ v = y+x, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{u}{3}+\dfrac{v}{3}, \\ y = \dfrac{u}{3}+\dfrac{2v}{3}. \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3},$$



т. е. $|J| = \dfrac{1}{3}$. В новой системе координат (u,v) область G ограничена прямыми $u=-3$, $u=5$, $v=-1$, $v=7$, т. е. представляет собой прямоугольник (рис. 19 $б$), а подынтегральная функция равна

$$2x+y = 2\left(-\frac{u}{3}+\frac{v}{3}\right) + \left(\frac{u}{3}+\frac{2v}{3}\right) = -\frac{u}{3}+\frac{4}{3}v.$$

Отметим, что первая система формул, написанная выше, преобразует параллелограмм $ABCK$ в прямоугольник $A_1B_1C_1K_1$, вторая система — наоборот, преобразует прямоугольник $A_1B_1C_1K_1$ в параллелограмм $ABCK$. При этом видно, что направление обхода вершин одной фигуры соответствует противоположному направлению обхода вершин другой. Именно поэтому $J<0$. Переходим к вычислениям:

$$\iint\limits_{ABCK} (2x+y)\,dxdy = \iint\limits_{A_1B_1C_1K_1} \left(-\frac{u}{3}+\frac{4}{3}v\right)\cdot\frac{1}{3}\,dudv = \frac{1}{9}\int\limits_{-3}^{5} du \int\limits_{-1}^{7} (-u+4v)\,dv =$$

$$= \frac{1}{9}\int\limits_{-3}^{5} du(-uv+2v^2)\Big|_{-1}^{7} = \frac{1}{9}\int\limits_{-3}^{5} \big[(-7u+98)-(u+2)\big]du =$$

$$= \frac{1}{9}\int\limits_{-3}^{5}(-8u+96)\,du = \frac{1}{9}(-4u^2+96u)\Big|_{-3}^{5} = \frac{704}{9}. \quad \bullet$$

Пример:

Вычислить

$$I = \iint\limits_D xy\,dxdy,$$

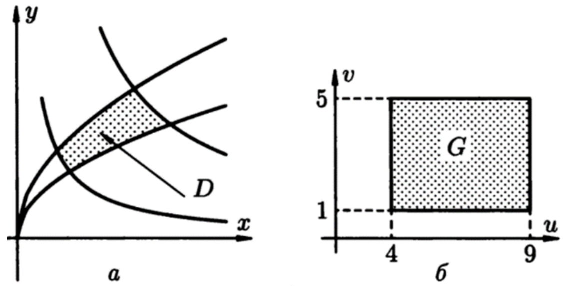
где D — область, ограниченная кривыми $y^2 = 4x$, $y^2 = 9x$, $xy = 1$, $xy = 5$.

◔ Область D изображена на рис. 20 *а*. Заметим, что расставить пределы интегрирования в исходном интеграле не просто, однако подходящая замена переменных позволяет свести этот интеграл к интегралу по прямоугольнику.

Введем новые переменные u и v при помощи равенств $y^2 = ux$, $xy = v$. Выразим отсюда переменные x и y через u и v: $x = \sqrt[3]{\dfrac{v^2}{u}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$.

Находим якобиан полученного преобразования

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\cdot v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}\cdot v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\cdot v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}\cdot v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}$$



откуда, с учетом того, что $x > 0$ на области D, а значит, $u = \dfrac{y^2}{x} > 0$, имеем $|J(u,v)| = \dfrac{1}{3u}$.

Таким образом, исходный интеграл в плоскости Ouv имеет вид

$$\iint\limits_G \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}\cdot\sqrt[3]{uv}\cdot\frac{1}{3u}\,dudv = \frac{1}{3}\iint\limits_G \frac{v}{u}\,du\,dv.$$

Граница области G описывается линиями $u = 4$ (так как одна из формул преобразования имеет вид $y^2 = ux$, то линии $y^2 = 4x$ в плоскости Oxy соответствует линия $u = 4$ в плоскости Ouv), $u = 9$, $v = 1$, $v = 5$ (рис. 20 *б*).

Поэтому область G имеет вид $4 \leqslant u \leqslant 9$, $1 \leqslant v \leqslant 5$ (т. е. представляет собой прямоугольник), а преобразованный интеграл вычисляется намного проще:

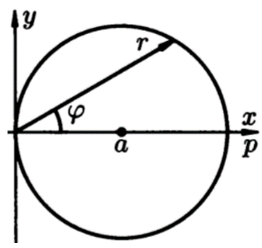
$$I = \frac{1}{3}\iint\limits_G \frac{v}{u}\,dudv = \frac{1}{3}\int\limits_4^9 \frac{du}{u}\int\limits_1^5 v\,dv = \frac{1}{3}\ln u\Big|_4^9\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_1^5 = 8\ln\frac{3}{2}.$$ ●

Пример:

Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy,$$

где D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$.



◔ Строим круг $x^2+y^2 \leqslant 2ax$ радиуса a с центром в точке $(a,0)$ (рис. 21). Подынтегральная функция четная по переменной y (т. е. $f(x,-y) = f(x,y)$), а область интегрирования симметрична относительно оси Ox. Поэтому можно вычислить интеграл только по верхнему полукругу и результат удвоить:

$$I = 2\iint\limits_{D/2} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy.$$

Переходим к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Для удобства расстановки пределов в полярных координатах совместим полярную систему с прямоугольной так, как это показано на рис. 21. Тогда полукруг $D/2$ в полярных координатах задается системой неравенств $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $r \leqslant 2a\cos\varphi$, подынтегральная функция примет вид $\sqrt{4a^2 - r^2}$, а $dxdy = r\,drd\varphi$. Таким образом,

$$I = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \sqrt{4a^2 - r^2}\cdot r\,dr = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \sqrt{4a^2 - r^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) d(4a^2 - r^2) =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \left(-\frac{1}{3}(4a^2 - r^2)^{3/2}\Big|_0^{2a\cos\varphi}\right) = -\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\left[(4a^2 - 4a^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - (4a^2)^{\frac{3}{2}}\right] d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\left[(4a^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - 8a^3\right] d\varphi = \frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}(8a^3 - 8a^3\sin^3\varphi)\,d\varphi =$$

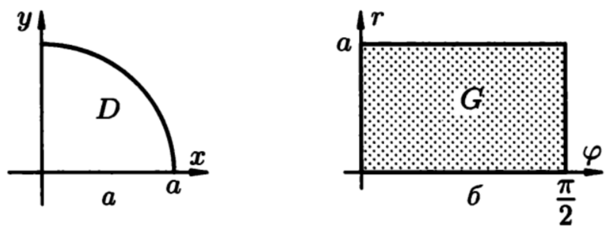
$$= \frac{16}{3}a^3\left[\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2}(1 - \cos^2\varphi)\,d(\cos\varphi)\right] = \frac{16}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Пример:

Вычислить повторный интеграл $I = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy$.

Сначала преобразуем повторный интеграл в двойной:

$$I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy, \text{ где } D: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$



Область интегрирования представляет собой четверть круга (рис. 22 *а*), поэтому удобно перейти к полярным координатам (r, φ). Полярную систему координат изобразим также в виде прямоугольной (рис. 22 *б*). Тогда область G в системе координат $Or\varphi$ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqslant r \leqslant a, \end{cases}$$

т. е. G — прямоугольник. Учтем также, что подынтегральная функция имеет вид $e^{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = e^{r^2}$. Следовательно,

$$I = \iint\limits_G e^{r^2} r\,drd\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^a e^{r^2} r\,dr = \varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^a = \frac{\pi}{4}(e^{a^2} - 1).$$

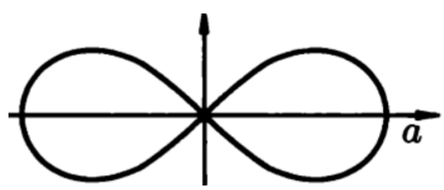
Пример:

Вычислить

$$I = \iint\limits_D x\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy,$$

где D — область, ограниченная лемнискатой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad x \geqslant 0.$$



❍ Заменяя x на $r\cos\varphi$, а y $r\sin\varphi$, получим на уравнение лемнискаты (рис. 23) в полярных координатах $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ ($\cos 2\varphi \geqslant 0$ при $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$). Подынтегральная функция равна $r^2\cos\varphi$. В силу симметрии лемнискаты относительно оси Ox и четности подынтегральной функции относительно переменной y можно записать:

$$I = 2\iint\limits_{\frac{D}{2}} r^2\cos\varphi\cdot r\,dr d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3\,dr = \frac{1}{2}a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2\varphi\right)^2 d(\sin\varphi) = \frac{a^4}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-4\sin^2\varphi+4\sin^4\varphi\right)d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{a^4}{2}\left(\sin\varphi - \frac{4}{3}\sin^3\varphi + \frac{4}{5}\sin^5\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{15}a^4. \quad ●$$